1er Master Ingénieur Mecanique & Aérospatial — Lundi 10 Janvier 2011 - 14h00-17h30

Examen de CAO — Durée totale : 3:30 heures.

Notes de cours non autorisées. Calculatrices autorisées.

1) Interpolation et approximation

On souhaite calculer une courbe des moindres carrés approximant un ensemble de N points p_k dans le plan. Ces points sont caractérisés par leur coordonnées (x_k,y_k). Ces points sont en outre ordonnés selon leur abscisse x croissante, et celle ci est comprise entre 0 et 1 inclus. Dans la suite, on va en fait considérer une courbe de Bézier un peu particulière puisqu'il s'agit d'une fonction $y=f(x)$.
En considérant un paramètre t compris entre 0 et 1, on a alors l'expression suivante pour la courbe désirée :

$$P(t)=\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t)P_i=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t)X_i\\ \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t)Y_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t)Y_i\end{pmatrix}$$

Le nombre de points p_k est en principe très supérieur au nombre de paramètres de $P(t)$ (ici, d+1), la question est donc de déterminer les valeurs de Y_i permettant d'approcher au mieux les points p_i (le calcul des X_i est inutile ici puisque l'abscisse de $P(t)$ est égale à t par définition). Pour ceci une approche par moindres carrés est proposée.

a) Pour un point $p_k=(x_k,y_k)$, le carré de la distance à la courbe $P(t)$ mesurée le long de l'axe y est notée r_k. Donner son expression. On considérera que cette distance est obtenue pour une valeur du paramètre $t_k = x_k$.

b) On note $R=\sum_{k=0}^{N-1} r_k$ la somme des ces écarts. Il s'agit ici de minimiser cette somme par rapport aux ordonnées des points P_j. Écrire que la dérivée de R par rapport à chaque Y_j est nulle (on pourra s'aider de l'expression de la dérivée d'un carré : $\frac{\partial A^2}{\partial Y_j}=2A\cdot\frac{\partial A}{\partial Y_j}$) et on pourra simplifier en considérant que $\frac{\partial Y_i}{\partial Y_j}=\delta_{ij}$ et que $\frac{\partial y_k}{\partial Y_j}=0\ \forall\ k$.

c) Mettre les relations obtenues sous la forme matricielle suivante : $\mathbf{J}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{J}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{J}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{y}$, avec :

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}Y_0\\ \vdots\\ Y_d\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{pmatrix}$$

Y est un vecteur colonne à d+1 composantes , **y** a N composantes. Quelle est l'expression générale des termes de **J** ?

d) L'équation matricielle précédente est un système linéaire à d+1 inconnues, que l'on peut mettre sous la forme suivante : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{b}$. Donner l'expression générale des termes de la matrice **A**. Quelles sont les conditions (nombre N de points, valeurs des x_i) pour lesquelles cette matrices est inversible ?

e) Dans quelles conditions la courbe calculée interpole-t-elle tous les points p_i ?

2) **Représentation B-REP**

On considère un solide A, et une transformation de ce solide pour aboutir au solide B (voir figures en bas de page). La relation d'Euler-Poincaré est la suivante : $\chi(S)=v-e+f-r=2(s-h)$, avec v = nombre de sommets (vertex), e = nombre d'arrêtes (edge), f =nombre de faces, r =nombre de boucles internes à une face (ring), s = nombre de solides indépendants, h = nombre de trous (hole, genre topologique).

a) Dénombrer chacune de ces variables et vérifier la relation d'Euler-Poincaré pour chacun des solides. Noter que dans les figures A,B en fin d'énoncé, toutes les arrêtes sont représentées, et celles ci séparent exactement deux faces distinctes (la frontière du solide est un *manifold*).

On souhaite maintenant déterminer une séquence d'opérateurs d'Euler afin de construire la topologie de ce solide. Les opérateurs admis ici , avec leur bilan en terme de nombre d'entités élémentaires, sont les suivants :

v	e	f	h	r	s	
(1,	1,	0,	0,	0,	0)	– MEV, Make an Edge and a Vertex
(0,	1,	1,	0,	0,	0)	– MEF, Make a Face and an Edge
(0,	-1,	0,	0,	1,	0)	– KEMR, Kill an Edge Make a Ring
(1,	0,	1,	0,	0,	1)	– MVFS, Make a Vertex, a Face and a Solid
(0,	0,	-1,	1,	1,	0)	– KFMRH, Kill a Face, Make a Ring and a Hole

Les vecteurs correspondant aux opérateurs ci-dessus forment une base incomplète de l'espace des configurations topologiques possibles car ceux ci ne permettent de représenter que les configurations vérifiant la relation d'Euler-Poincaré.

b) A partir de la relation d'Euler-Poincaré, déterminer un vecteur V que l'on doit rajouter aux 5 vecteurs précédents afin de disposer d'une base complète. Bien entendu, tout vecteur obtenu par multiplication par un scalaire non nul est valable, on donnera ici celui pour lequel la composante correspondant à v (la première) est égale à +1.

c) La base désormais complète se met sous forme d'une matrice **A**. Donner cette matrice, et expliquer sa signification.

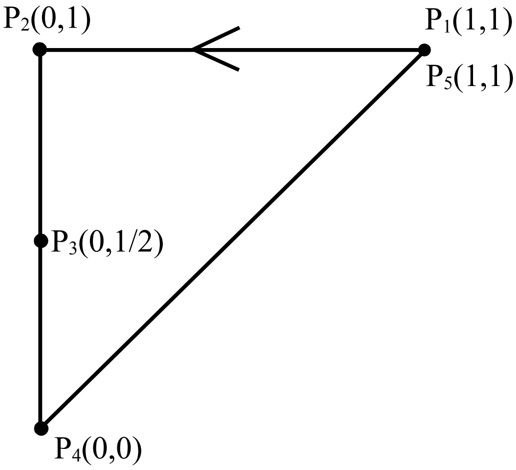
d) Donner la séquence d'opérations minimale permettant de passer du solide A au solide B. On utilisera pour ce faire l'inverse de la matrice A déterminée précédemment.

Note : $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 & -2 & \vdots \\ 3 & 5 & -3 & -2 & 2 & \vdots \\ -3 & 7 & 3 & 2 & -2 & V \\ -6 & 2 & -6 & 4 & 8 & \vdots \\ 3 & 5 & 9 & -2 & 2 & \vdots \\ -6 & -2 & -6 & 8 & 4 & \vdots \end{pmatrix}$, V étant le vecteur (transposé) demandé en b)

Figure : solides A (à gauche) et B (à droite) vus en axonométrie.

3) Courbes B-Splines

On s'intéresse ici à une courbe B-Spline de continuité *au moins* C_0, dont le polygone de contrôle est donné. Celui ci part et arrive en un même point car on veut représenter une courbe fermée. Dans un premier temps, on considère une séquence nodale non-uniforme (donc avec un certain nombre de répétitions pour assurer l'interpolation des points de départ et d'arrivée - toutefois les noeuds intérieurs sont disposés uniformément). Le paramètre *u* est ici compris entre 0 et 1.



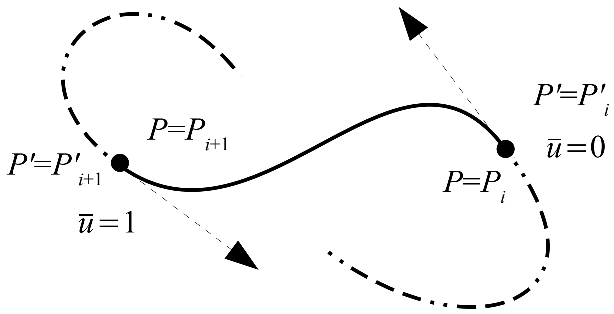
a) Quelles sont les valeurs que peut prendre le degré dans le cas présent ? Quelle est la séquence nodale associée pour chaque cas ? Quelle est le degré de continuité global de la courbe dans chaque cas (y compris au point de départ/arrivée de la courbe) ?
b) Le degré est maintenant fixé à sa valeur maximale. De quelle catégorie de courbe particulière fait désormais partie cette B-Spline ?
c) Avec partir de l'algorithme de De Casteljau, calculer numériquement les coordonnées du point G correspondant à u=1/2
d) On désire maintenant construire une courbe périodique de degré 2. Quelles sont les modifications à effectuer au polygone de contrôle ? Donner la séquence nodale uniforme telle que l'intervalle valide pour le paramètre *u* soit [0...1] comme précédemment.
e) Quelle est de degré de continuité global de cette courbe (y compris au point de raccord)?

4) Invariance affine

Une spline est une courbe polynomiale par morceaux de degré 3 interpolant un certain nombre de points de contrôles, et dont les pentes au niveau de ces points de contrôles sont calculées automatiquement afin de satisfaire des conditions de continuité.

Sur chaque intervalle (entre deux points de contrôles), les coordonnées de la courbes sont $x_{[i]}(\bar{u})=a_{[i]0}+a_{[i]1}\bar{u}+a_{[i]2}\bar{u}^2+a_{[i]3}\bar{u}^3 \quad , \bar{u}\in[0,1]$ (idem pour les coordonnées y et z), et les valeurs des coefficients $a_{[i]}$ valent, en fonction des positions des points de contrôle $P_i = [x_i,y_i,z_i]^T$: et des pentes en chaque point de contrôle $P'_i = [x'_i,y'_i,z'_i]^T$:

$$\begin{cases} a_{[i]0}=x_i \\ a_{[i]1}=x'_i \\ a_{[i]2}=3(x_{i+1}-x_i)-2x'_i-x'_{i+1} \\ a_{[i]3}=2(x_i-x_{i+1})+x'_i+x'_{i+1} \end{cases}$$



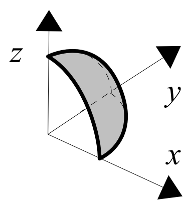
On s'intéresse ici à la spline naturelle pour laquelle les pentes sont calculées de façon à imposer une continuité C_2. Celles ci sont alors solution du système linéaire suivant (donné ici pour la coordonnée x , les mêmes équations sont utilisées pour y et z):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-2} \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1-x_0) \\ 3(x_2-x_0) \\ 3(x_3-x_1) \\ \vdots \\ 3(x_{n-1}-x_{n-3}) \\ 3(x_{n-1}-x_{n-2}) \end{pmatrix}$$

a) Démontrer formellement qu'une telle courbe possède la propriété d'invariance affine. Plus généralement, quelle condition doit respecter la procédure de calcul des pentes pour assurer l'invariance affine ?
b) Donner un exemple de calcul des pentes tel que l'on ait pas invariance affine.

5) Huitième de sphère

On souhaite ici représenter un huitième de sphère unité centrée sur l'origine, et contenu dans l'octant pour lequel x,y et z sont positifs, par un carreau NURBS rationnel $S(u,v)$.



a) Déterminer les coordonnées des points de contrôle (P_{ij}) ainsi que les poids w_{ij} associés. On les numérotera sur un schéma clair. On s'arrangera pour que les isoparamétriques en v soient parallèles au plan xy. On pourra procéder en deux étapes, d'abord trouver les P.C. d'un quart de cercle (e.g. dans le plan xz), et construction de la surface par rotation de celui ci autour de l'axe z. Donner l'expression globale de la surface $S(u,v)$ (se ramener en 3D si nécessaire !)
b) Calculer numériquement les coordonnées d'un point P correspondant à (u=1/2, v=1/4) et vérifier que celui ci est bien situé sur la sphère. On donne les polynômes de Bernstein de degré 2 : $B_0^2(t)=(1-t)^2 \quad B_1^2(t)=2t(1-t) \quad B_2^2(t)=t^2$
c) Calculer les dérivées premières $\partial S(u,v)/\partial u$ et $\partial S(u,v)/\partial v$ au point P.
d) Même chose au point $Q(u=1,v=1)$. Commenter .

6) Généralités

Indiquer dans la grille quelles sont les possibilités offertes par les quelques outils de modélisation géométrique proposés - répondre par oui ou non. Attention, une mauvaise réponse enlève des points, *i.e.* si vous ne savez pas, laissez la case vide.

	Polynômes de Lagrange	Splines cardinales	Splines naturelles	Bézier	B-splines	NURBS
Est une interpolation						
Est une approximation						
Permet les modifications locales						
A une expression polynomiale (éventuellement par morceaux)						
Évaluation robuste						
Représentation exacte des coniques						
Possibilité d'inclure des discontinuités de la dérivée						
Représentation exacte d'une courbe « offset »						
Possibilité d'imposer des points de passage						
Est à « variation décroissante »						