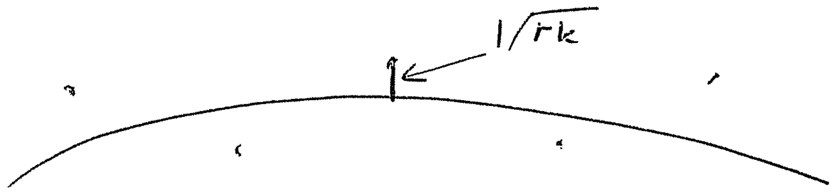
Correction examen CAO 10/01/11

Question 1 :



a) $$r_k = \left(\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t_k) Y_i - y_k \right)^2$$

b) $$R = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t_k) Y_i - y_k \right)^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial Y_j} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t_k) Y_i - y_k \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t_k) \delta_{ij} \right)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t_k) Y_i - y_k \right) \cdot B_j^d(t_k) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t_k) Y_i \cdot B_j^d(t_k) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k B_j^d(t_k) \quad \forall j$$

c) $$J^T J \cdot Y = J^T y$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} B_0^d(t_0) & \dots & B_d^d(t_0) \\ B_0(t_1) & & \vdots \\ \vdots & B_i^d(t_j) & \vdots \\ B_0(t_{N-1}) & & B_d^d(t_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$J_{ij} = B_i^d(t_j)$$

d)

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} B_i^d(t_k)\, B_j^d(t_k)$$

N

A inversible si assez de points pour déterminer tous les coefficients $d+1$. De plus, les $t_k = x_k$ doivent être distincts dans le cas limite où $N = d+1$.

e) Dans le cas où le nombre de points est juste égal au nombre de coefficients i.e.

si $\underline{\underline{N = d+1}}$

exercice 2 :

a)

Solide A :

$v = 16$

$e = 24$

$f = 11$

$h = 0$

$r = 1$

$s = 1$

$16 - 24 + 11 - 1 = 2(1-0)$

$2 = 2$

Solide B :

$v = 22$

$e = 33$

$f = 14$

$h = 1$

$r = 3$

$s = 1$

$22 - 33 + 14 - 3 = 2(1-1)$

$0 = 0$

b) il suffit de prendre un vecteur dont les composants sont proportionnelles aux coefficient de la relation d'E.P.

$$v - e + f - r - 2s + 2h = 0$$

dans l'ordre des opérateurs, cela donne

$$v - e + f + 2h - r - 2s = 0$$

soit $V = (1 \ -1 \ 1 \ 2 \ -1 \ -2)$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & \end{pmatrix}.$$

cette matrice permet, connaissant le nombre d'opérations d'Euler-Poincaré de chaque type appliqués à un solide, de déterminer le nombre d'entités dont il se compose.

$$\begin{pmatrix} \Delta v \\ \Delta e \\ \Delta f \\ \Delta h \\ \Delta r \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A^T & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

garantit que l'on reste avec un solide valide...

d.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_6 \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} \Delta v \\ \vdots \\ \Delta s \end{pmatrix}$$

avec ici

$\Delta v = 6$
$\Delta e = 9$
$\Delta f = 3$
$\Delta h = 1$
$\Delta r = 2$
$\Delta s =$

en faisant le calcul, on obtient :

$n_1 = 6$ $\longrightarrow$ $6 \times MEU$

$n_2 = 4$ $\quad 4 \times MEF$

$n_3 = 1$ $\quad 1 \times KEMR$

$n_4 = 0$

$n_5 = 1$ $\quad 1 \times$ KFMRM.

$n_0 = 0$ $\longleftarrow$ naturel car on passe d'une configuration à une autre respectants toutes deux la relation d'E.P.

3)

a/ Courbe C_0 → degré 1

cf page suivante pour les séq. nodales

↓

courbe C_∞ (Bézier) → degré 4 (5 PC.)

degré	1	2	3	4
Continuité pour $0<u<1$	C_0	C_1	C_2	C_∞
Continuité en $u=0$ / $u=1$	C_0	C_0	C_0	C_0

b) il s'agit d'une courbe de Bézier.

c) $u = 1/2$.

P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_4^0, P_5^0

$$P_1^1 = \frac{P_1^0 + P_2^0}{2} = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$$P_2^1 = \frac{P_2^0 + P_1^0}{2} = \left(0, \tfrac{3}{4}\right)$$

$$P_3^1 = \underline{\qquad\qquad} = \left(0, \tfrac{1}{4}\right)$$

$$P_4^1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$P_1^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$

$P_2^2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$P_3^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$

$\left(\frac{1}{8}, \frac{11}{16}\right)$

$\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{16}\right)$

→ $\left(\frac{1}{8}, \frac{9}{16}\right)$

3) a) Séquences nodales.

degré 4 $\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}$

degré 3 $\{0\ 0\ 0\ 0\ 1/2\ 1\ 1\ 1\ 1\}$

degré 2 $\{0\ 0\ 0\ 1/3\ 2/3\ 1\ 1\ 1\}$

degré 1 $\{0\ 0\ 1/4\ 1/2\ 3/4\ 1\ 1\}$.

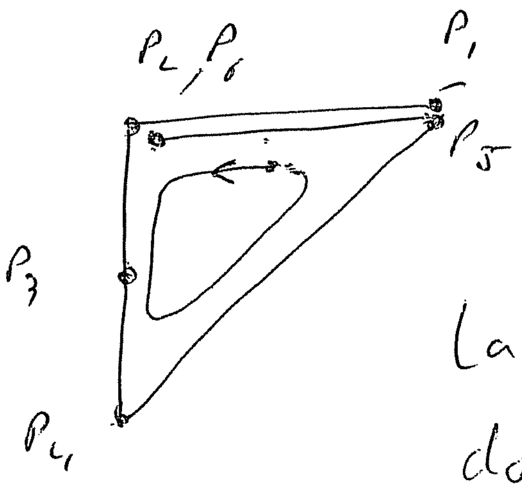
d) Courbe périodique de degré deux :

avec ces points de contrôle : deux points de contrôle doivent être répétés.

il y a ici le choix : soit on répète P_2

soit ——— P_4.

On choisit la 1ère option : on renumérote.



La séquence nodale doit être périodique

Les segments du polygone de contrôle correspondant à des arcs de courbe sont :

$P_1\ P_2\ P_3$, $P_2\ P_3\ P_4$, $P_3\ P_4\ P_5$ et $P_4\ P_5\ P_6$

il y a donc ces segments de courbe pour $u = 0$ à $u = 1$

↓

$$u = \left\{ -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2} \right\}$$

e) le degré de continuité global est C_1
(y compris au raccord)

4) invariance affine

Sur chaque arc, on a :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{jx} \\ a_{jy} \\ a_{jz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}(\bar{u}) = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 \bar{u} + \vec{A}_2 \bar{u}^2 + \vec{A}_3 \bar{u}^3 .$$

avec

$$\vec{A}_0 = P_i$$

$$\vec{A}_1 = P'_i$$

$$\vec{A}_2 = 3(P_{i+1} - P_i) - 2(P'_i) - P'_{i+1}$$

$$\vec{A}_3 = 2(P_i - P_{i+1}) + P'_i + P'_{i+1}$$

On a invariance affine si :

$$\varphi(P(\bar{u}^3)) = \varphi(\vec{P}(\bar{u}, P_i, P_{i+1}))$$

$$= \vec{P}(\bar{u}, \varphi(P_i), \varphi(P_{i+1})) .$$

avec $\varphi(\vec{P}) = A\vec{P} + \vec{t}$.

Ceci sera le cas si $\vec{P}(\bar{u}, P_i, P_{i+1})$ est une fonction linéaire de P_i et P_{i+1}.

$\vec{P} = \mathcal{L}(P_i, P_{i+1})$. Ceci ne peut être le cas que si A_0, A, A_2 et A_3 sont des fonctions linéaires de P_i et P_{i+1}

4) suite.

A_0 est linéaire dans tous les cas.

Par contre,

A_1, A_2 et A_3 ne sont linéaires que

si P'_i et P'_{i+1} sont aussi linéaires.

la condition est donc que

$$P'_i = \mathcal{L}(P_i, P_{i+1} \dots)$$

$$P'_{i+1} = \mathcal{L}(P_i, P_{i+1})$$

Dans le cas des splines naturelles, c'est le cas puisque les x'_i, y'_i et z'_i sont solutions d'un système linéaire fonction des P_i (x_i, y_i, z_i).

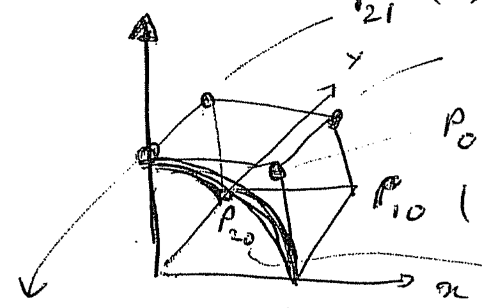
5) il suffit de choisir $P'_i \neq \mathcal{L}(P_i)$

par exemple une fonction constante

(car ce n'est plus linéaire, mais affine)

$$\boxed{\begin{cases} P'_i = K_i \\ P'_{i+1} = K_{i+1} \end{cases}}$$

5) a)



P_{02}, P_{12}, P_{22}

$(0, 0, 1, 1)$ $\quad$ $(0, 0, 1, 1)$

$(\underbrace{0, 0, 1}_{\text{Coordonnés 3D (déjà divisées par } w\text{!)}}, \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{poids}})$

P_{ij}

$$S^w(u,v) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} P^w_{ij} B_i^2(u) B_j^2(v)$$

$$S(u,v) = \frac{\sum_i \sum_j P_{ij} w_{ij} B_i^2(u) B_j^2(v)}{\sum_i \sum_j w_{ij} B_i^2(u) B_j^2(v)}$$

b) $u = 1/2 \quad v = 1/4 \Rightarrow \begin{cases} B_0^2(1/2) = \frac{1}{4} \quad B_1^2(1/2) = \frac{1}{2} \\ B_2^2(1/2) = 1/4 \end{cases}$

$$\begin{cases} B_0^2(1/4) = \frac{9}{16} \quad B_1^2(1/4) = \frac{3}{8} \\ B_2^2(1/4) = \frac{1}{16} \end{cases}$$

5 b) Suite :

$$S^w(1/2, 1/4) = P_{00}^w B_0^2(1/2)\, B_0^2(1/4)$$
$$+ P_{10}\, B_1^2(1/2)\, B_0^2(1/4)$$
$$+ P_{20}\, B_2^2(1/2)\, B_0^2(1/4)$$
$$+$$
$$\vdots$$

$$= P_{00}^w \cdot \frac{9}{64} + P_{10}^w \cdot \frac{18}{64} + P_{20}^w \cdot \frac{9}{64} +$$
$$P_{01}^w \cdot \frac{6}{64} + P_{11}^w \cdot \frac{12}{64} + P_{21} \cdot \frac{6}{64} +$$
$$P_{02} \cdot \frac{1}{64} + P_{12} \cdot \frac{2}{64} + P_{22} \cdot \frac{1}{64}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 9/64 + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot 18/64 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 9/64$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{6}{64} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \frac{12}{64} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \frac{6}{64}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1/64 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \frac{2}{64} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1/64 \simeq \begin{pmatrix} 0{,}499 \\ 0{,}499 \\ 0{,}279 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$S(1/2, 1/4) \simeq \begin{pmatrix} 0{,}657 \\ 0{,}657 \\ 0{,}368 \end{pmatrix}. \quad \text{et } w = 0{,}7598$$

5 c)

$$S(u,v) = \frac{A(u)}{w(u)}$$

calculé   calculé

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\frac{\partial A}{\partial u} \cdot w - \frac{\partial w}{\partial u} A}{w(u)^2}$$

calculé.

reste à calculer $\frac{\partial A}{\partial u}$ et $\frac{\partial w}{\partial u}$, qui se calculent comme :

$$\frac{\partial P^w}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial u} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial B_0^2(1/2)}{\partial u} = 2u-2 = -1 \qquad \frac{\partial B_1^2}{\partial u}(1/2) = 2-4u = 0$$

$$\partial B_2^2(1/2) = 2u = 1.$$

$$\frac{\partial P^w}{\partial u}(1/2, 1/4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot -9/16 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times 9/16 +$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{1\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot -3/8 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} 3/8$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot -1/16 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1/16 = \begin{pmatrix} -0{,}82707 \\ 0{,}82707 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial u}(1/2, 1/4) = \begin{pmatrix} -1.08931 \\ 1.08931 \\ 0 \end{pmatrix}$$

m̂ procédure $\frac{\partial S}{\partial v}$.

en $(u=1, v=1)$ les dérivées sont infinies à cause de la paramétrisation.

6) Généralités

Indiquer dans la grille quelles sont les possibilités offertes par les quelques outils de modélisation géométrique proposés - répondre par oui ou non. Attention, une mauvaise réponse enlève des points, *i.e.* si vous ne savez pas, laissez la case vide.

	Polynômes de Lagrange	Splines cardinales	Splines naturelles	Bézier	B-splines	NURBS
Est une interpolation	O	O	O	N	N	N
Est une approximation	N	N	N	O	O	O
Permet les modifications locales	N	O	N	N	O	O
A une expression polynomiale (éventuellement par morceaux)	O	O	O	O	O	N
Évaluation robuste	N	O	O	O	O	O
Représentation exacte des coniques	N	N	N	N	N	O
Possibilité d'inclure des discontinuités de la dérivée	N	N	N	N	O	O
Représentation exacte d'une courbe « offset »	N	N	N	N	N	N
Possibilité d'imposer des points de passage	O	O	O	N	O	O
Est à « variation décroissante »	N	N	N	O courbes	O courbes	O courbes