coredion. examen 9/01 1

a) exercice 1.

vertex

covertex 1

edge 1 ← covertex 2 → 2

orientation ⊕

f_1 → loop 1 → coedge 1, coedge 2, coedge 3, coedge 4

f_1 → loop 2 → coedge 5, coedge 6, coedge 7

coedge 1	edge 1 orientation ⊕	covertex 1	1
		2	2
coedge 2	edge 2 orientation ⊖	~~3~~	2
		~~4~~	3
coedge 3	edge 3 ⊕	~~5~~	3
		~~6~~	4
		~~7~~	4
coedge 4	edge 4 ⊖	~~8~~	1
		9	5
coedge 5	edge 5 ⊖	10	6
coedge 6	6 ⊖	11	6
		12	7
coedge 7	7 ⊖	13	7
		14	5

b)

14 vertices 21 edges 9 faces 2 inner loops

1 shell 1 solid.

$$14 - 21 + 9 - 2 = 2(1 - 1)$$

$$0 = 0.$$ Ok

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ +1 & \cancel{1} & +1 & +2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\text{vrd} = (0\,0\,0\,0\,0\,0)$.

$\text{solid} = (14\ 21\ 9\ 1\ 2\ 1) = S^*$

$\Rightarrow$ opérations : ~~$O = A^{-1} \cdot S$~~.

$$O = S \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow O = (13\ 9\ 1\ 1\ 1\ 0)$$

13 × MEV

9 × MEF

1 × KEMR

1 × VUES

1 × KEMRAS

+ vérification de la relation E.P.

exercice 2)

a) $$P(u) = \sum_{i=0}^{2} B_i^2(u) P_i$$

b) $$T(\vec{u}) = \frac{\frac{\partial P}{\partial u}}{\left|\frac{\partial P}{\partial u}\right|} = \frac{2\sum_{i=0}^{1} B_i^1(u)\,\underbrace{(P_{i+1}-P_i)}_{P'_i}}{\left|\quad \times \quad\right|}$$

c) $$N(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} T(\vec{u})$$ par exemple

d) avec les équations de Frenet on a :

$$\frac{dT(s)}{ds} = K(s) \cdot N(s)$$

il faut repasser en termes de "u" - paramètre non naturel.

$$\frac{dT(s)}{ds} = \frac{dT(u)}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot N(u) = K(u) \cdot \overbrace{N(u) \cdot N(u)}^{=1}$$

s étant un paramètre naturel, on a :

$$\left\|\frac{dP}{ds}\right\| = 1 \rightarrow \left\|\frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{ds}\right\| = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{du}{ds}\right| = \frac{1}{\|dP\|} = \frac{1}{\|P'\|}$$

On a donc :

$$\frac{dT}{du} \cdot \frac{1}{\|\ddot{P}\|} N(u) = k(u) \cdot \cancel{N(u)}$$

$$\rightarrow k(u) = \frac{dT(u)}{du} \cdot \frac{N(u)}{\left\|\frac{dP}{du}\right\| \cancel{N(u)}}$$

---

e) On a besoin de $\frac{dP}{du}$ et $\frac{dT}{du}$.

$$\frac{dP}{du} = 2 \sum_{i=0}^{1} B_i^1(u) \left(P_{i+1} - P_i\right) \begin{cases} u = 1/2 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\+1\end{pmatrix} \\ u = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{d\left(\frac{\frac{dP}{du}}{\left|\frac{dP}{du}\right|}\right)}{du} = \frac{\frac{d^2P}{du^2} \cdot \left|\frac{dP}{du}\right| - \frac{\partial}{\partial u}\left|\frac{dP}{du}\right| \cdot \frac{dP}{du}}{\left|\frac{dP}{du}\right|^2}$$

$$\frac{d}{du}\left|\frac{dP}{du}\right| = \frac{d}{du}\sqrt{\frac{dP}{du} \cdot \frac{dP}{du}} = + \frac{\cancel{2}\, \frac{d^2P}{du^2} \cdot \frac{dP}{du}}{\cancel{2} \left|\frac{dP}{du}\right|}$$

$$\sqrt{u^2}' \Rightarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \frac{2uu'}{\sqrt{u^2}}$$

en fait :

$$\kappa(u) = \frac{dT}{du} \cdot \frac{N}{\left|\frac{dP}{du}\right|}$$

$$= \frac{\frac{d^2P}{du^2} \cdot \left|\frac{dP}{du}\right| - \frac{\left(\frac{d^2P}{du^2} \cdot \frac{dP}{du}\right)}{\left|\frac{dP}{du}\right|} \cdot \frac{dP}{du}}{\left|\frac{dP}{du}\right|^2} \cdot \frac{N(u)}{\left|\frac{dP}{du}\right|}$$

calcul A.N.

$$\frac{d^2P}{du^2} = \text{cste} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

pour $u = 1/2$. $\frac{dP}{du} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad N(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} T(u)$

$$\kappa(u) = \frac{\begin{pmatrix} +2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{=0}}{1/2} \cdot \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$T(u) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad N(u) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\kappa(u) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\sqrt{2}}$$

AN. 2 $\qquad u = 0$

$$\frac{d^2P}{du^2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dP}{du} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} T(u)$$

$$T(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$K(u) = \frac{\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot 2 - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{u \cdot 2}$$

$$= 1/2.$$

~~a) C ... cons.~~

~~b) démontrer que.~~

$$\cancel{\sum_{i=0}^{d} B_i^d(u) = 1 = (1-u+u)^d}$$

~~1 1~~
~~1 2 1~~
~~1 3 3 1~~

$$\cancel{1 = (1-u+u)^d = \sum \binom{d}{i} u^i (1-u)^{d-i}}$$

$$\cancel{= \sum B_i^d(u)}$$

~~CQFD.~~

3) Patch de Coons

Patch de coon comme somme de 3 patchs indépendants.

$$S_c = P_1 + P_2 + P_3.$$

$$P_1 = u\, C_{v_1}(v) + (1-u)\, C_{v_2}(v)$$

$$P_2 = v\, C_{u_1}(u) + (1-v)\, C_{u_2}(u)$$

$$P_3 = Auv + B(1-u)v + C(1-v)u + D(1-u)(1-v)$$

On doit, par les 3 surfaces, représenter avec le même nb de points de contrôle, ~~et même séquence nodale~~. de même degré.

~~P_1 : en u : $(0\,0\ 1\,1)$~~
~~v : $(0\,0\,0\ 1\,1\,1)$~~

P_1 = en u : (1)
v = (2)

$$P_1(u,v) = \sum_{ij} P^1_{ij}\, B^1_i(u)\, B^2_j(v)$$

P^1_{ij} = Points de contrôles de C_{v_1} et C_{v_2}.

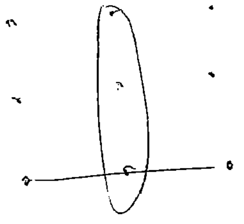
$$P^1_{ij} = P^j_{v_i}$$

On doit faire une élévation de degré en u:

$$P^{1*}_{ij} = \begin{cases} P^{1*}_{0j} \\ \frac{i}{d+1} P^1_{i-1\,j} + \left(1-\frac{i}{d+1}\right) P^1_{ij} \\ P^1_{d} \end{cases}$$

$$P^{1*}_{ij} = \begin{cases} P^1_{0j} \\ \frac{1}{2} P^1_{i-1\,j} + \frac{1}{2} P^1_{ij} \\ P^1_{dj} \end{cases}$$

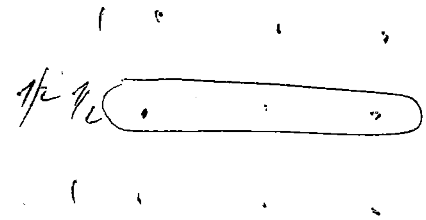
$1/2+1/2$!



On fait la m̂ chose en u :

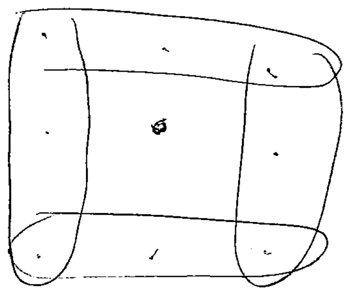
$$P^2_{ij} = P^{i}_{uj}$$

$$P^{2*}_{ij} = \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$$



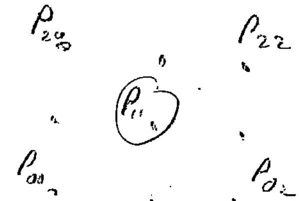
avec P^3, il faut le faire deux fois

P_3



au final, les points de contrôle de la surface de Coons sont les m̂ que ceux des courbes frontières (car les contributions bilinéaires s'annulent)

Seul le point central est à calculer.



$$P^S_{11} = P^{1*}_{11} + P^{2*}_{11} - P^{3*}_{11}$$

$$= \frac{1}{2} P^1_{01} + \frac{1}{2} P^1_{11} + \frac{1}{2} P^2_{10} + \frac{1}{2} P^2_{11} - \frac{1}{4}(A + B + C + D)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} P^1_{u_1} + \frac{1}{2} P^1_{u_2} + \frac{1}{2} P^1_{v_1} + \frac{1}{2} P^1_{v_2} - \frac{1}{4} P^0_{u_1} - \frac{1}{4} P^2_{u_1} - \frac{1}{4} P^0_{u_2} - \frac{1}{4} P^2_{u_2}}$$

4) a) $S(u,v) = (1-v)\, C_0(u) + v\, C(u)$.

ici, C_0 est $\equiv 0$. $\quad C_0(u) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \forall u$.

$\Rightarrow \boxed{S(u,v) = v \cdot C(u)} \quad C(u) = \sum_{i=0}^{2} B_i^2 P_i$.

b) P_{ij} Surface de degré 2 en u
1 en v

3 PC en u
2 PC en v.

$P^S_{ij} = P_i$ pour $j = 1$ $\quad p = 2$

$P_{ij} = 0$ pour $j = 0$. $\quad q = 1$.

$U = \{0\,0\,0 \quad 1\,1\,1\}$

$V = \{0\,0\,1\,1\}$.

c)

$C^*(u)$ projection centrale sur le plan

$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

$$C(u) \begin{cases} \sum B_i x_i \\ \sum B_i y_i \\ \sum B_i z_i \end{cases} \rightarrow C^*(u) \begin{cases} \frac{\sum B_i x_i}{\sum B_i z_i} \\ \frac{\sum B_i y_i}{\sum B_i z_i} \\ 1 \end{cases}$$

$$C^*(u) = \begin{cases} x^*(u) \\ y^*(u) \\ 1 \end{cases}$$

il s'agit d'un ~~arc~~ arc de cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

preuve : calculer le rayon en fonction de u.

$$r^2(u) = \cancel{\sqrt{}}\; x^{*2}(u) + y^{*2}(u) = \underline{cte}$$

$$r^2(u) = \frac{\left(\sum B_i x_i\right)^2 + \left(\sum B_i y_i\right)^2}{\left(\sum B_i z_i\right)^2}$$

$$B_0^2 = (1-u)^2 \qquad B_1^2 = 2u(1-u) \qquad B_2^2 = u^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left((1-u)^2\cdot 0 + 2u(1-u)(-2) + u^2\cdot 0\right)^2 + \left((1-u)^2\cdot(-2) + 2u(1-u)\cdot 0 + u^2\cdot 2\right)^2}{\left((1-u)^2\cdot 2 + u^2\cdot 2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-4u(1-u)\right)^2 + \left[2u^2 - 2(1-u)^2\right]^2}{\left(2u^2 + 2(1-u)^2\right)^2}$$

$$= \frac{16u^2(1-u)^2 + 4u^4 - 8u^2(1-u)^2 + 4(1-u)^4}{4u^4 + 8u^2(1-u)^2 + 4(1-u)^4}$$

$= 1$. cqfd.

d) il suffit de déterminer le rapport. $\frac{|OC(t)|}{|OC^{*}(t)|}$

u est le ~~bon~~ paramètre t et v est précisément ce rapport.

~~Posons $t = u$ dans $C^*(u)$~~.

$$\begin{cases} u(t) = t \\ V(t) = \dfrac{|OC(t)|}{|OC^{*}(t)|} \end{cases} = \frac{\sqrt{\dfrac{(\Sigma \beta_i x_i)^2 + (\Sigma \beta_i y_i)^2 + (\Sigma \beta_i z_i)^2}{(\Sigma \beta_i z_i)^2}}}{\sqrt{(\Sigma \beta_i z_i)^2 + (\Sigma \beta_i y_i)^2 + \beta_i z_i^2}}$$

$$= \frac{1}{|\Sigma \beta_i z_i|}$$

$\beta_i \geq 0 \qquad z_i > 0$

$$= \frac{1}{2(1-t)^2 + 2t^2}$$

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = t \\ V(t) = \dfrac{1}{4t^2 - 4t + 2} \end{cases}} = \frac{1}{4t^2 - 4t + 2} \quad \cancel{\frac{1}{4(t^2 - t + 1)}}$$

e) Les coordonnées homogènes ne font autre chose que ce qu'on a fait ici avec z !

Prenons ici :

$$P_0^w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_1^w = \begin{pmatrix} \cancel{0}-2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_2^w \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_i^w \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ W_i \end{pmatrix}$$

w_i — $= z_i$

$$C^w(u) = \sum B_i^z P_i^w = \begin{pmatrix} \sum B_i X_i \\ \sum B Y_i \\ \sum B Z_i \\ \sum B w_i \end{pmatrix}$$

$$C^P(u) = \begin{pmatrix} \frac{\sum B_i X_i}{\sum B_i w_i} \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C^*(u).$$

CQFD

b)

i) $U = \{000\ 11\ 22\ 333\}$.

G_α – $\alpha \to \infty$. ~~cardinalité dénombrable~~ infinie dénombrable

$C_\alpha \to$ dépend de la paramétrisation

ici, dans l'espace ~~[illegible]~~ euclidien, $\beta = 1$

si l'on se place dans l'espace hongrois, $\beta = 0$!!

exercice I

a) degree

0	$\{0 \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{3}\}$	"C_{-1}"
1	$\{0 0 \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{3} \frac{3}{3}\}$	C_0
2	$\{0 0 0 \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{2}{2}\}$	C_1
3	$\{0000 \ 1111\}$	C^∞

b) degré 2 → séquence nodale avec 7
4 P.C noeuds, dont 6 fixés.

il est donc impossible ~~de~~ d'imposer le passage par P_2 (pour cela il faudrait disposer au moins de 8 ~~pts~~ noeuds dont 6 fixés, c'est à dire d'un point de contrôle en plus.).

c) Courbe de Bézier. (degré 3)

d) soit P_i^0 les points initiaux

on pose :

$$P_i^j = (1-u)\, P_i^{j-1} + u\, P_{i+1}^{j-1} \quad ; \quad \begin{matrix} j=1 \dots d \\ i=0 \dots d-j \end{matrix}$$

c) $u = 1/3$

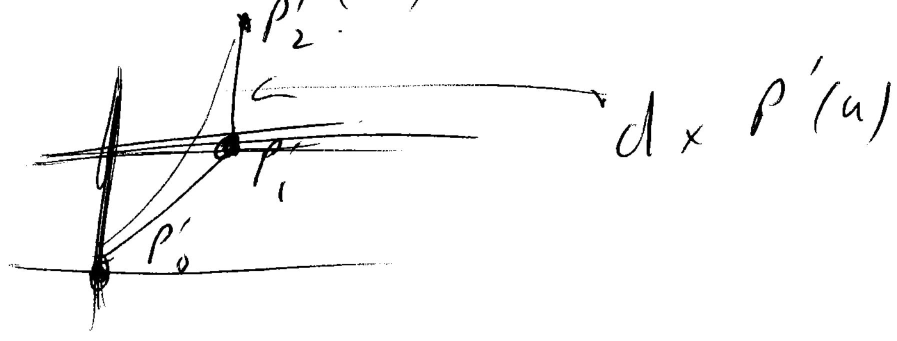
$$P_0^1 = 2/3\, P_0^0 + 1/3\, P_1^0 = (0, 2/3)$$
$$P_1^1 = 2/3\, P_1^0 + 1/3\, P_2^0 = (1/3, 0)$$
$$P_2^1 = 2/3\, P_2^0 + 1/3\, P_3^0 = (4/3, 1/3)$$

$$P_0^2 = 2/3\, P_0^1 + 1/3\, P_1^1 = (1/9, 4/9)$$
$$P_1^2 = 2/3\, P_1^1 + 1/3\, P_2^1 = (6/9, 1/9)$$

$$P_0^3 = 2/3\, P_0^2 + 1/3\, P_1^2 = \left(8/27, 9/27\right) = P(1/3)$$

f) Le polygone de contrôle du 1e hodographe se constr en prenant la différence ~~avec~~ entre deux Pts de contrôle successifs.

$$P'_0 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$P'_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$P'_2 = P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Forma algoritmului ~~de~~ de Casteljau în cazul ~~de~~ calculul derivatei.

Calcul de $p_i'^{0} = p_{i+1} - p_i$

$$p_i'^{j} = (1-u)\,p_i'^{j-1} + u\,p_{i+1}'^{j-1} \;; \quad \begin{array}{l} j = 1 \ldots d-1 \\ i = 0 \ldots d-j-2 \end{array}$$

2.5

6) Generalities

Fill **each** cell in the matrix with *yes* or *no* . A bad answer cancel points, therefore it is advised to respond only if you are sure of your answer – (no answer does not mean "*no*")

	Lagrange polynomials	Natural Splines	Cardinal Splines	Bézier curves	B-splines curves	NURBS curves
Allow "periodic" curves	No	N	Y	N	Y	Y
Interpolates the control points	Y	Y	Y	N	N	N
Allows local control	N	N	Y	N	Y	Y
Has a polynomial expression (eventually by parts)	Y	Y	Y	Y	Y	N
Allows the exact representation of conics	N	N	N	N	N	Y
Allows arbitrary discontinuities in the derivatives	N	N	N	N	Y	Y
Allows the exact representation of an "offset" curve	N	N	N	N	N	N
Is «variation diminishing»	N	N	N	Y	Y	Y

± 0,05 [illegible]